1 Was ist das Newton-Verfahren?

Das Newton-Verfahren ist ein numerisches Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung einer Nullstelle einer gegeben Funktion.
Analytisch exakt können Nullstellen von Geraden

$$f(x) = \sum_{i=0}^{1} a_i \cdot x^i = a_0 + a_1 x,$$

von quadratischen

$$f(x) = \sum_{i=0}^{2} a_i \cdot x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

und von einigen anderen Funktionen bestimmt werden. Wenn man sich allerdings allgemein die ganzrationalen Funktionen

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i = a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + a_2 \cdot x^2 + \ldots + a_n \cdot x^n$$

mit $a_i \in \mathbb{R}$ und $i,n \in \mathbb{N}$ ansieht, dann stellt man schnell fest, dass sich die Bestimmung von Nullstellen für ganzrationale Funktionen vom Grad $n > 2$ als schwierig erweist. Hierbei hilft das Newton-Verfahren.
Ferner kann man der Newton-Verfahren auch dazu verwenden, Wurzelausdrücke näherungsweise zu berechnen.

2 Vorgehen beim Newton-Verfahren

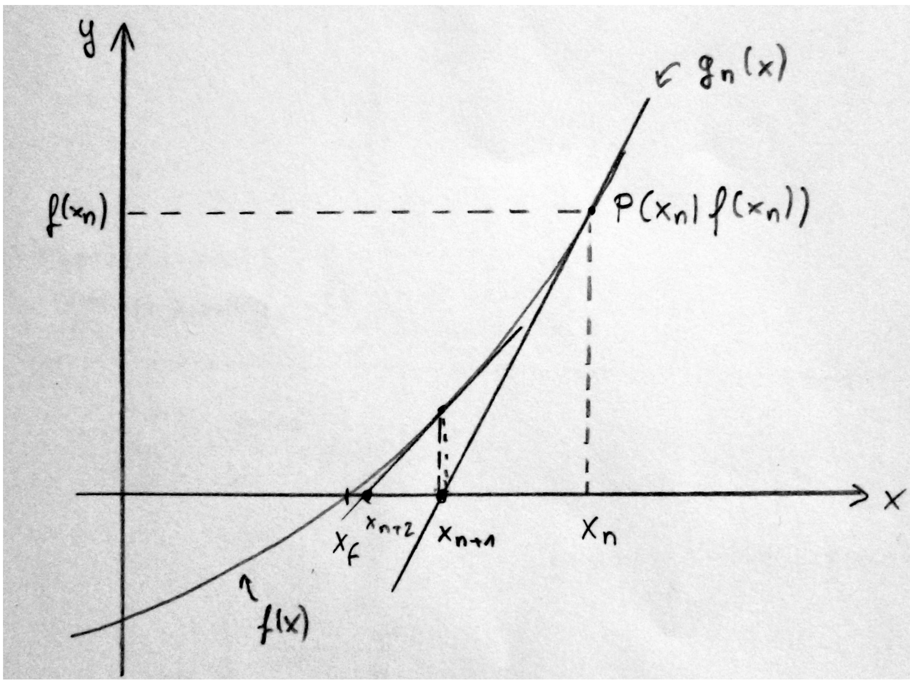

Abbildung 1: Skizze zur Herleitung des Newton-Verfahrens.

Das Vorgehen beim Newton-Verfahren besteht darin (siehe dazu Abbildung 1),

a) dass man sich einen x-Wert x_n wählt

b) und den zugehörigen Funktionswert $f(x_n)$ berechnet.

c) Anschließend wird die Gleichung der Tangente g_n der Funktion f für den Punkt $P\left[x_n \middle| f(x_n)\right]$ bestimmt

d) und damit der Schnittpunkt der Tangente g_n mit der x-Achse berechnet.

e) Der x-Wert des entsprechenden Schnittpunks liefert nun den neuen Wert x_{n+1}, mit dem das Verfahren nun wiederholt wird.

Die Idee des Newton-Verfahrens besteht nun darin, dass der Schnittpunkt der Tangente g_n mit der x-Achse einen besseren Wert für die gesuchte Nullstelle x_f liefert.

3 Herleitung der Formel für das Newton-Verfahren

3.1 Die allgemeine Tangentengleichung

Die Tangente g_n der Funktion f im Punkt $P\left[x_n \middle| f(x_n)\right]$ habe die folgende Funktionsvorschrift:

$$g_n(x) = m \cdot x + b, \tag{1}$$

wobei m die Steigung und b der Y-Achsenabschnitt ist. Da es sich bei g_n um eine Tangente handelt, hat sie für den Punkt P die gleiche Steigung wie die Funktion f. Damit folgt, dass die Ableitung an der Stelle x_n gleich der Tangentensteigung sein muss.

$$m = f'(x_n). \tag{2}$$

Ferner muss die Tangente g_n durch den Punkt $P\left[x_n \middle| f(x_n)\right]$ laufen. Das bedeutet, dass die Funktion f und die Tangente g_n an der Stelle x_n den gleichen Funktionswert haben müssen:

$$g_n(x_n) = f(x_n). \tag{3}$$

Damit lässt sich der Y-Achsenabschnitt der Tangente berechnen. Zunächst wird die Gleichung 1 nach b umgestellt:

$$g_n(x) = m \cdot x + b \qquad \Rightarrow \qquad b = g_n(x) - m \cdot x. \tag{4}$$

Für die Stelle x_n kann man nun den Wert des Y-Achsenabschnitts b mit Hilfe der Gleichungen 2 und 3 berechnen:

$$b = \overbrace{g_n(x_n)}^{=f(x_n)} - \overbrace{m}^{=f'(x_n)} \cdot x_n = f(x_n) - f'(x_n) \cdot x_n. \tag{5}$$

Nun kann man aus Gleichung 1 mithilfe der Gleichung 2 und 5 die allgemeine Tangengleichung für g_n formulieren:

$$\boxed{g_n(x) = \overbrace{f'(x_n)}^{m} \cdot x + \overbrace{f(x_n) - f'(x_n) \cdot x_n}^{b}}. \tag{6}$$

3.2 Die Newton-Formel

Die Idee den Newton-Verfahren besteht in der Annahme, dass der Schnittpunkt der Tangente g_n mit der Y-Achse näher an der gesuchten Nullstelle x_f liegt, als der Wert x_n. Im Folgenden wird die Nullstelle der Tangente g_n mit x_{n+1} bezeichnet.
Es gilt also:

$$g(x_{n+1}) = 0. \tag{7}$$

Nun setzt man die allgemeine Tangentengleichung (Gleichung 6) ein und löst nach x_{n+1} auf:

$$\begin{array}{lcll} g(x_{n+1}) & = & 0 & |\text{Ersetzen nach Gl. 1} \\ m \cdot x_{n+1} + b & = & 0 & |\text{Ersetzen nach Gl. 6} \\ f'(x_n) \cdot x_{n+1} + f(x_n) - f'(x_n) \cdot x_n & = & 0 & |-f(x_n) \\ f'(x_n) \cdot x_{n+1} - f'(x_n) \cdot x_n & = & -f(x_n) & |\text{Ausklammern} \\ f'(x_n) \cdot (x_{n+1} - x_n) & = & -f(x_n) & |:f'(x_n) \\ x_{n+1} - x_n & = & -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} & |+x_n \\ x_{n+1} & = & x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. & \end{array} \tag{8}$$

Das Newtonverfahren liefert zusammenfassend die Iterationsvorschrift

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}. \tag{9}$$

zur näherungsweisen Bestimmung einer Nullstelle der Funktion f. Mit jedem Iterationsschritt $i+1$ wird die neue Nullstelle der Tangente am Punkt $P\left[x_i \middle| f(x_i\right]$ mit der y-Achse berechnet.

3.3 Einschränkungen

Das Newton-Verfahren liefert in der Regel einen guten Wert für die Nullstelle einer Funktion. Aber durch eine ungeschickte Wahl des ersten Startwertes oder bei ungeeigneten Funkionen kann es passieren, dass das die Iterationsvorschrift nicht konvergiert, also kein brauchbares Ergebnis liefert. Das passiert zum Beispiel, wenn die Ergebnisse x_n und x_{n+1} im gleichen Abstand um die richtige Nullstelle x_f „hin- und herspringen". Daher ist es sinnvoll, eine Abbruchbedingung abhängig von der gewünschten Genauigkeit zu formulieren, beispielsweise, wenn nach 100 Iterationsschritten noch kein brauchbares Ergebnis vorliegt, dann verwende einen anderen Startwert und beginne die Iteration von vorn.
Eine weitere Einschränkung ergibt sich dadurch, dass es sich beim Newton-Verfahren, um ein numerisches Verfahren handelt. Das Newton-Verfahren liefert in der Regel keinen exakten Wert, sondern nur einen angenäherten Wert. Das heißt, man muss eine Genauigkeit für das Ergebnis festlegen, beispielsweise auf 10 Nachkommastellen soll das Ergebnis genau sein. Wenn sich entsprechend die 10 ersten Nachkommastellen von Iterationsschritt zu Iterationsschritt nicht mehr ändern, kann man die Iteration abbrechen und das Ergebnis verwenden.

4 Beispiele

4.1 Zerlegung in Linearfaktoren

Hier soll die Funktion $f(x) = \frac{x^3}{4} - \frac{5x^2}{4} - x + 5$ in ihre Linearfaktoren zerlegt werden. Da es sich um eine Funktion dritten Grades handelt, kann man mit der über das Newton-Verfahren gefundenen Nullstelle über die Polynomdivision den zugehörigen Linearfaktor abspalten. Es bleibt infolgedessen nur noch eine quadratische Gleichung übrig, deren Nullstellen sich über die quadratische Ergänzung oder über die p-q-Formel bestimmen lassen. So ist der Plan. Nur wie geht man da vor?

Zunächst schaut man sich die Gleichung 9 noch einmal an:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Man braucht die Funktion $f(x)$ und die erste Ableitung der Funktion $f'(x)$, sowie ein x_n. Die Funktion $f(x)$ ist gegeben und die erste Ableitung $f'(x)$ lässt sich schnell bestimmen:

$$f(x) = \frac{x^3}{4} - \frac{5x^2}{4} - x + 5 \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{3x^2}{4} - \frac{5x}{2} - 1.$$

Der Startwert, in der Formel mit x_n bezeichnet, wird einfach festgelegt. In diesem Fall habe ich mich für die 7 als Startwert entschieden ($x_0 = 7$). Nun geht es an die Iteration. Dazu stellt man am besten eine Tabelle auf:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	7	22,5	18,25	5,767123288
1	5,767123288	5,611451428	9,526975042	5,178116661
2	5,178116661	1,015839047	6,164377466	5,013324831
3	5,013324831	0,070399831	5,316757317	5,000083709
4	5,000083709	0,00043949	5,250418551	5,000000003
5	5,000000003	$1{,}75169 \cdot 10^{-08}$	5,250000017	5
6	5	0	5,25	5
7	5	0	5,25	5

Tabelle 1: Bestimmung einer Nullstelle von $f(x) = \frac{x^3}{4} - \frac{5x^2}{4} - x + 5$.

Wie man aus der Tabelle 1 entnehmen kann, liefert das Newton-Verfahren die Nullstelle $x_{NS1} = 5$. Der zugehörige Linearfaktor lautet $(x-5)$. Nun kann die Polynomdivision durchgeführt werden:

$$\begin{array}{l}
\left(\ \frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{4}x^2 - x + 5\right) : (x-5) = \frac{1}{4}x^2 - 1 \\
\underline{-\frac{1}{4}x^3 + \frac{5}{4}x^2} \\
\qquad\qquad -x + 5 \\
\qquad\qquad \underline{\ \ \ x - 5} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Anschließend lassen sich die beiden anderen Nullstellen bestimmen:

$$\begin{array}{rcll}
\frac{1}{4}x^2 - 1 & = & 0 & |+1 \\
\frac{1}{4}x^2 & = & 1 & |\cdot 4 \\
x^2 & = & 4 & |\sqrt{} \\
x & = & \pm 2 &
\end{array}$$

Damit lauten die weiteren Nullstellen der Funktion $x_{NS2} = 2$ und $x_{NS3} = -2$. Da der Faktor vor der Variablen (x) mit der höchsten Potenz (x^3) in der Funktion $\frac{1}{4}$ ist, kann man die gegebene Funktion auch schreiben als:

$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot (x-5) \cdot (x-2) \cdot (x+2).$$

4.2 Näherung für $\sqrt{2}$

Um den Wert $x = \sqrt{2}$ anzunähern, muss man diese Gleichung auf ein Nullstellen-Problem zurückführen:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2} \\ x^2 &= 2 \\ x^2 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Nun wird die Ableitung der entsprechenden Funktion $f(x) = x^2 - 2$ berechnet:

$$f'(x) = 2x.$$

Durch das Einsetzen in das Newton-Verfahren (Gleichung 9) erhält man die Iterationsvorschrift:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = x_n - \frac{1}{2}x_n + \frac{2}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right).$$

Diese Iterationsformel wurde auch von Heron hergeleitet und ist als Heron-Verfahren bekannt. Wählt man nun den Startwert $x_0 = 1$, so bekommt man laut Tabelle 2 das Ergebnis $\sqrt{2} \approx 1{,}414213562$.

n	x_n	x_{n+1}	x_{n+1}^2
0	1	1,5	2,25
1	1,5	1,416666667	2,006944444
2	1,416666667	1,414215686	2,000006007
3	1,414215686	1,414213562	2
4	1,414213562	1,414213562	2

Tabelle 2: Näherungsweises Bestimmen von $x = \sqrt{2}$

4.3 Näherung für $\sqrt[m]{a}$

Auch in diesem Fall wird zunächst die Funktion entwickelt, deren Nullstelle zu sichen ist:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[m]{a} \\ x^m &= a \\ x^m - a &= 0 = f(x) \end{aligned}$$

Die Ableitung lautet $f'(x) = m \cdot x^{m-1}$. Eingesetzt in das Newton-Verfahren (Gleichung 9) bekommt man

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \tfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= x_n - \left(\tfrac{x_n^m - a}{m \cdot x_n^{m-1}}\right) \\ &= x_n - \tfrac{x_n}{m} + \tfrac{a}{m \cdot x_n^{m-1}} \\ &= \tfrac{m}{m}x_n - \tfrac{x_n}{m} + \tfrac{a}{m \cdot x_n^{m-1}} \\ &= \tfrac{1}{m}\left((m-1)x_n + \tfrac{a}{x_n^{m-1}}\right) \end{aligned} \tag{10}$$

Wenn man nun beispielsweise das Ergebnis $x = \sqrt[4]{39{,}0625}$ sucht, kann man die eben hergeleitete Iterationsformel benutzen.
Mit $m = 4$ und $a = 39{,}0625$ folgt aus Gleichung 10 die Iterationsformel

$$x_{n+1} = \frac{1}{4}\left(3 \cdot x_n + \frac{39{,}0625}{x_n^3}\right).$$

n	x_n	x_{n+1}	x_{n+1}^4
0	5,5	4,183696469	306,366076
1	4,183696469	3,271130494	114,4963069
2	3,271130494	2,732349304	55,73716503
3	2,732349304	2,527992797	40,84165466
4	2,527992797	2,500461529	39,09135356
5	2,500461529	2,500000128	39,06250799
6	2,500000128	2,5	39,0625
7	2,5	2,5	39,0625

Tabelle 3: Näherungsweises Bestimmen von $x = \sqrt[4]{39{,}0625}$

Mit dem zufällig festgesetzten Startwert von $x_0 = 5{,}5$ erhält man anhand der Tabelle 3 nach sieben Iterationsschritten das richtige Ergebnis $\sqrt[4]{39{,}0625} = 2{,}5$ in hinreichender Genauigkeit.