Beweis des Euklids

Es gibt Zahlen, die man nicht als rationale Zahlen darstellen kann, beispielsweise $\sqrt{2}$.

Beweis durch Widerspruch (Indirekter Beweis) von Euklid:

(1) Angenommen: $\sqrt{2}$ sei rational, d.h. $\sqrt{2}=\frac{q}{p}$ mit **teilerfremden ganzen Zahlen** p und q .
=> 2 ist als gekürzter Bruch darstellbar.

(2) $2=\frac{p^2}{q^2}$ => $2q^2=p^2$

(3) Da die linke Seite der Gleichung gerade ist, ist auch die rechte Seite p^2 gerade.
=> $p^2=p\cdot p$ ist durch 2 teilbar.

(4) Da 2 keine Quadratzahl ist, muss entsprechend p durch 2 teilbar sein.
=> p ist also eine gerade Zahl.

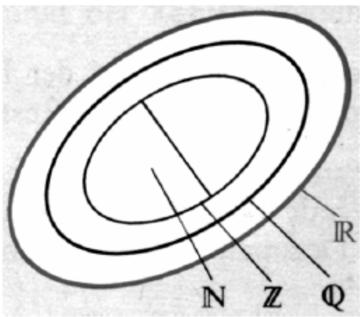
(5) Wenn p eine gerade, durch 2 teilbare Zahl ist, kann man eine weitere ganze Zahl r definieren, mit $p=2r$.

(6) Damit folgt $2q^2=p^2=(2\cdot r)^2=4r^2$ => $q^2=2r^2$

(7) Da die rechte Seite der Gleichung gerade ist, muss auch die linke Seite gerade sein.
=> Auch q ist gerade und damit durch 2 teilbar.

(8) Das steht aber zum Widerspruch zu der Annahme, dass p und q teilerfremd sein müssen.
Entsprechend kann $\sqrt{2}$ **nicht rational** sein!

Menge der Zahlen



Menge der **natürlichen** Zahlen: $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$

Menge der **ganzen** Zahlen: $\mathbf{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, ...\}$

Menge der **rationalen** Zahlen: $\mathbf{Q} = \{ \frac{z}{n} \mid z \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}\}$

Menge der **reellen** Zahlen: $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$