Gelten für $a \geq 0$ und $b \geq 0$ ($a, b \in \mathbb{R}$) allgemein die folgenden Aussagen?

1. $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
2. $\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

Man kann durch einfaches Einsetzen schnell zeigen, dass die Aussagen nicht allgemein richtig sein können:

Aussage 1: $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ man wählt beispielsweise $a=9$ und $b=16$.

$$\begin{aligned} \sqrt{9+16} &= \sqrt{9}+\sqrt{16} \\ \sqrt{25} &= 3+4 \quad \text{Widerspruch!} \\ 5 &= 7 \end{aligned}$$

Aussage 2: $\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ man wählt beispielsweise $a=25$ und $b=9$

$$\begin{aligned} \sqrt{25-9} &= \sqrt{25}-\sqrt{9} \\ \sqrt{16} &= 5-3 \quad \text{Widerspruch!} \\ 4 &= 2 \end{aligned}$$

Allerdings kann man, wenn man die binomischen Formeln kennt, auch beweisen, für welche Zahlen die Aussagen richtig sind:

Aussage 1: $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

$$\begin{aligned} \sqrt{a+b} &= \sqrt{a}+\sqrt{b} && |\text{ quadrieren} \\ a+b &= \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 && |\text{ Binomische Formel} \\ a+b &= \sqrt{a}^2+2\cdot\sqrt{a}\sqrt{b}+\sqrt{b}^2 \\ a+b &= a+2\cdot\sqrt{a}\sqrt{b}+b && |-a,-b \\ 0 &= 2\cdot\sqrt{a\cdot b} \end{aligned}$$

Das kann nur richtig sein, wenn a oder b gleich Null sind.

Aussage 2: $\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

$$\begin{aligned} \sqrt{a-b} &= \sqrt{a}-\sqrt{b} && |\text{ quadrieren} \\ a-b &= \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 && |\text{ Binomische Formel} \\ a-b &= \sqrt{a}^2-2\cdot\sqrt{a}\sqrt{b}+\sqrt{b}^2 \\ a-b &= a-2\cdot\sqrt{a}\sqrt{b}+b && |-a,+b \\ 0 &= -2\cdot\sqrt{a\cdot b}+2b \end{aligned}$$

Das ist richtig, wenn entweder $b=0$ ist, oder $a=b$.

Denn mit $a=b$ folgt:

$-2\cdot\sqrt{a\cdot b}+2b = -2\cdot\sqrt{b\cdot b}+2b = -2\cdot\sqrt{b^2}+2b = -2b+2b = 0$