Louvre-Pyramide

Der Eingang des berühmten Pariser Kunst-Museums "Louvre" wird durch eine Glas-Pyramide mit quadratischer Grundfläche gebildet:

Die Breite beträgt ungefähr 35m und die Höhe 22m.

Diese Pyramide wird jetzt in einem dreidimensionalen rechtwinkligen Koordinatensystem (mit den Längeneinheiten von jeweils 1m) betrachtet.

Die Bodenfläche sei die x_1-x_2-Ebene, und die x_3-Achse sei lotrecht nach oben gerichtet. Das Koordinatensystem sei weiterhin so gewählt, dass die vier Eckpunkte auf dem Boden die folgenden Koordinaten haben:

A(0|0|0) , B(35|0|0) , C(35|35|0) , D(0|35|0)

a) Die Dachspitze sei S. Begründen Sie, dass S die folgenden Koordinaten hat: $S(17{,}5|17{,}5|22)$.

Zeichnen Sie die Pyramide in ein Koordinatensystem ein.
(1L.E. $\cong$ 1m, der Verkürzungsfaktor in x_1-Richtung beträgt $\frac{1}{\sqrt{2}}$, der Winkel zwischen x_1- und x_2-Achse ist 135° groß.)

b) Bestimmen Sie eine Parameter- und eine Koordinatenform der Ebene E, in der die Pyramidenseitenfläche ABS liegt.

c) Bestimmen Sie den Winkel, den die Seitenflächen der Pyramide jeweils mit dem Fußboden bilden.

d) Um ein Angebot für die Fensterreinigung einzuholen, muss man den Flächeninhalt der Glasflächen berechnen. Berechnen Sie dazu zuerst den Flächeninhalt eines der vier (kongruenten) Seitendreiecke und dann die gesamte zu reinigende Glasfläche.

e) Am Tage fällt bei schönem Wetter (paralleles) Sonnenlicht auf die Pyramide. Zum betrachteten Zeitpunkt sei der Richtungsvektor des Lichtes $\vec{v} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie die Koordinaten des Schattenpunktes P der Pyramidenspitze auf dem Boden.

f) Nachts sollen zur Verstärkung der Lichteffekte die Seitenflächen der Pyramide von außen mit Scheinwerfern beleuchtet werden.
Einer der Scheinwerfer soll mit Hilfe eines Lichtmastes lotrecht über dem Bodenpunkt $F(17{,}5|-7|0)$ angebracht werden. Die als punktförmig angenommene Lichtquelle soll die Seitenfläche ABS so beleuchten, dass das Licht im Schwerpunkt dieser Seitenfläche senkrecht auftrifft.
Zeigen Sie zunächst, dass der Schwerpunkt M_1 die Koordinaten $M_1\left(\frac{35}{2}\middle|\frac{35}{6}\middle|\frac{22}{3}\right)$ hat. Bestimmen Sie dann die notwendige Höhe der Lichtquelle über dem Boden und ihren Abstand von der Seitenfläche der Pyramide.

Hinweis: Die Punkteverteilung ist ggf. nicht exakt, da Sie Berechnungen früher oder später anstellen, die Sie in folgenden Teilaufgaben wieder verwenden können.

Aufgabe	a	b	c	d	e	f	Summe
erreichbare Punkte	6	12	5	5	10	12	50
erreichte Punkte							

Insgesamt
______P. von _____P.

_____ Notenpunkte

Analytische Geometrie (Lösungen)

a) S liegt in x_3-Richtung 22m über dem Mittelpunkt der Grundfläche der Pyramide mit einer Kantenlänge von 35m.
Darum hat S die Koordinaten S(17,5|17,5|22).

b) Eine Parameterform der Ebene E, in der die Seitenfläche ABS liegt, ergibt sich aus der Drei-Punkte-Form:

$$E: \vec{x} = \vec{0A} + r \cdot \vec{AB} + s \cdot \vec{AS} \quad , \quad r, s \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 35 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 17{,}5 \\ 17{,}5 \\ 22 \end{pmatrix}$$

Eine Koordinatenform lässt sich mithilfe eines Normalenvektors zur Ebene bestimmen:

$$\begin{pmatrix} 35 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} * \vec{n} = 0 \ \wedge \ \begin{pmatrix} 17{,}5 \\ 17{,}5 \\ 22 \end{pmatrix} * \vec{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{r} 35n_1 = 0 \\ 17{,}5n_1 + 17{,}5n_2 + 22n_3 = 0 \end{array} \right|$$

Gleichung I liefert $n_1 = 0$. Aus Gleichung II folgt dann $17{,}5n_2 = -22n_3$.
Mit $n_2 = 44$ folgt $n_3 = -35$.

Damit ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 44 \\ -35 \end{pmatrix}$ Normalenvektor von E.

Daraus folgt, dass $\vec{x} * \begin{pmatrix} 0 \\ 44 \\ -35 \end{pmatrix} = 0$ eine Vektorgleichung von E und $44x_2 - 35x_3 = 0$ eine Koordinatengleichung von E ist.

c) Betrachtet wird (stellvertretend für alle vier Flächen) die Seitenfläche ABS, so dass auf die Ergebnisse aus Teil b) zurückgegriffen werden kann.
Der Winkel zwischen zwei Ebenen entspricht dem Winkel zwischen den zugehörigen Normalenvektoren.

Es gilt: $\vec{n}_{ABS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 44 \\ -35 \end{pmatrix}$; $\vec{n}_{x_1,x_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aus $\cos\alpha = \dfrac{\left|\vec{n}_{ABS} * \vec{n}_{x_1,x_2}\right|}{\left|\vec{n}_{ABS}\right| \cdot \left|\vec{n}_{x_1,x_2}\right|} = \dfrac{35}{\sqrt{3161} \cdot \sqrt{1}} \approx 0{,}6225$ folgt $\alpha \approx 51{,}5°$.

d) Die zur Fußbodenseite gehörende Höhe einer jeden Pyramidenseitenfläche erhält man mithilfe des Satzes von Pythagoras aus der Höhe der Pyramide ($h = 22$) und der halben Länge der Fußbodenseite ($\frac{l}{2} = 17{,}5$).

$$h_\Delta = \sqrt{22^2 + 17{,}5^2}$$

Damit gilt: $A_\Delta = \dfrac{1}{2} \cdot l \cdot h_\Delta = \dfrac{35 \cdot \sqrt{22^2 + 17{,}5^2}}{2} \approx 491{,}95$.

Der Inhalt einer Seitenfläche beträgt also ca. 492m^2 und die zu reinigende Gesamtfläche (vier Innen- und vier Außenflächen) demnach ca. 3936m^2.

e) Die Geradengleichung des „Sonnenstrahls“ durch S lautet:

$$g: \vec{x} = \vec{0S} + t \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 17{,}5 \\ 17{,}5 \\ 22 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Auf dem Fußboden ist die x_3-Komponente Null: $22 - 10t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{11}{5}$.

Der Schattenpunkt P der Pyramidenspitze hat also den Ortsvektor

$\vec{p} = \begin{pmatrix} 17{,}5 \\ 17{,}5 \\ 22 \end{pmatrix} + \frac{11}{5} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50{,}5 \\ 39{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$ und P somit die Koordinaten P(50,5|39,5|0).

f) Der Schwerpunkt M des Dreiecks ABS hat den Ortsvektor

$$\vec{0M} = \frac{1}{3} \cdot \left(\vec{0A} + \vec{0B} + \vec{0S}\right) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 52{,}5 \\ 17{,}5 \\ 22 \end{pmatrix};$$

damit hat M die Koordinaten $M(\frac{35}{2} | \frac{35}{6} | \frac{22}{3})$.

Der Scheinwerfer liegt auf einer Geraden mit der Gleichung

$$h: \vec{x} = \vec{0M} + q \cdot \vec{n}_{ABS} = \begin{pmatrix} 35/2 \\ 35/6 \\ 22/3 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 44 \\ -35 \end{pmatrix}.$$

Um den gesuchten Scheinwerferpunkt G zu ermitteln, ist q so zu bestimmen, dass die x_2-Komponente in der Geradengleichung den Wert $x_2 = -7$ annimmt.

Also $\frac{35}{6} + 44q = -7 \Leftrightarrow q = -\frac{7}{24} \approx -0{,}29$.

Damit erhält man die Koordinaten für den Ort G der Lichtquelle:

$G(\frac{35}{2} | -7 | \frac{421}{24}) \approx$ G(17,5|-7|17,5)

Die notwendige Höhe der Lichtquelle beträgt also ca. 17,5m.

Der Abstand des Punktes G von der Seitenfläche ABS wird mithilfe der Hesseschen Normalenform von E bestimmt.

Betrag des Normalenvektors von E: $\left|\vec{n}\right| = \sqrt{44^2 + (-35)^2} = \sqrt{3161} \approx 56{,}22$

Damit ergibt sich als HNF von E: $\frac{1}{\sqrt{3161}} \cdot \left(44x_2 - 35x_3\right) = 0$

Der gesuchte Abstand kann durch Einsetzen der Koordinaten von G in die linke Seite der HNF von E bestimmt werden:

$$d(G;E) = \left| \frac{1}{\sqrt{3161}} \cdot \left(44 \cdot (-7) - 35 \cdot \frac{421}{24}\right) \right| \approx 16{,}4$$

Die Lichtquelle befindet sich demnach in einem Abstand von ca. 16,4m von der Seitenfläche der Pyramide.